Rque : Interprétation de l'assertion
$$\sum_{k=1}^{n} \ln(1-p_k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

lorsque $p_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$, c'est équivalent

à $$\boxed{\sum_{k=1}^{n} p_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty}$$

Rque : 1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$

2) Question :

a) Est-ce que si (a_n)
- $a_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$
- (a_n) tend plus vite vers 0 que $\left(\frac{1}{n}\right)$

i.e : $n a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

alors $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$ converge ?

b) Si (a_n) positive tq $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \to +\infty$

est ce que (a_n) tend moins vite vers 0 que $\left(\frac{1}{n}\right)$?

question : Est-ce que $\left(\frac{1}{n}\right)$ est une référence ?

NON.

Est-ce que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}\right)$ est une référence ?

Quelle est la proba d'avoir une $\infty^{\text{té}}$ de fois "Pile" ?

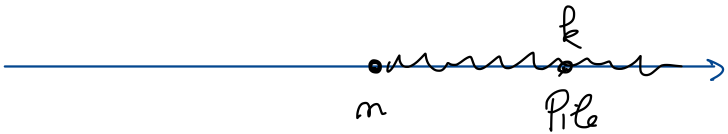
Etape 1 : Traduire l'évènement :

(à l'aide des $(P_k)_{k\geq 1}$).

On note A_∞ = "obtenir une $\infty^{\text{té}}$ de Piles"

On note B_∞ = "avoir que des Piles à partir d'un certain rang"

B_∞ :



On a

$$\omega \in B_\infty \iff \exists n \in \mathbb{N}^*, \forall k \geq n, \underbrace{\omega_k = \text{Pile}}_{\omega \in P_k}$$

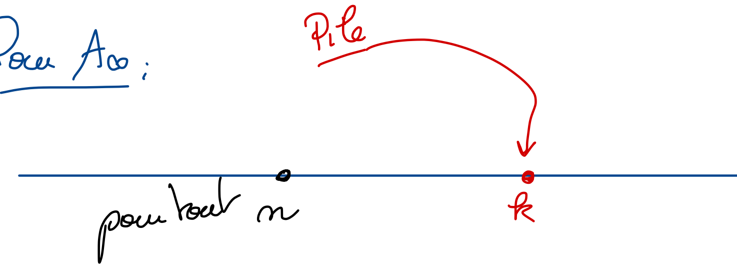
$$\iff \exists n \in \mathbb{N}, \omega \in \bigcap_{k \geq n} P_k$$

$$\iff \omega \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} P_k$$

On a $$\boxed{B_\infty = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} P_k}$$

Rque : $\bigcup_{i \in I} \bigcap_{j \in J} A_{ij} \neq \bigcap_{j \in J} \bigcup_{i \in I} A_{ij}$.

Pour A_∞ :



On a

$$\omega \in A_\infty \iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \omega_k = \text{Pile}.$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \exists k \geq n, \omega \in P_k$$

$$\iff \forall n \in \mathbb{N}, \omega \in \bigcup_{k \geq n} P_k$$

$$\iff \omega \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} P_k$$

On a $$\boxed{A_\infty = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \geq n} P_k}$$

Rque : 1) On a $\forall \omega \in \Omega$

$$\omega \in B_\infty \Rightarrow \omega \in A_\infty$$

Donc $\boxed{B_\infty \subset A_\infty}$

2) $$\boxed{\overline{A_\infty} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{k\geq n} \overline{P_k}}$$

Etape 2 : mq $P(A_\infty) = 1$:

On a

$$P(A_\infty) = P\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{k\geq n} P_k}_{\downarrow \text{ en } n}\Big)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} P\Big(\bigcup_{k\geq n} P_k\Big)$$

On montre que $\forall n \in \mathbb{N}^*$

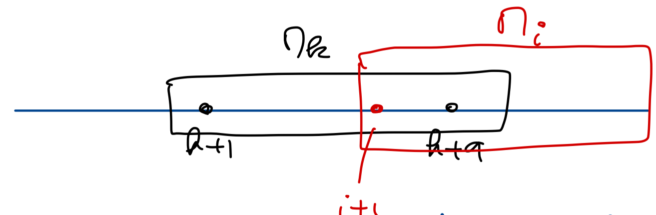
$$P\Big(\bigcup_{k\geq n} P_k\Big) = 1$$

On a $P(A_\infty) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1$.

Question : Motif de longueur $q \in \mathbb{N}^*$
($\underline{Ex}$: $M = PP\ldots FP$.)

Montrer que le motif apparait P-ps une ∞té de fois.

On note M_k = "Motif entre les étapes $k+1$ et $k+q$"



Pb : M_k et M_i ne sont pas indep pour P

Dans le cas d'un motif M ∞ ?